Option "Sciences Naturelles" (C)

Durée : 3 heures

Les deux problèmes sont indépendants

Les candidats pourront utiliser du papier millimétré

I

a étant un nombre réel strictement positif, f est une application de l'intervalle $[0, a]$ dans $\mathbb{R}$, continue, strictement croissante, et telle que $f(0) = 0$.

On désigne par g l'application réciproque de f, de l'intervalle $[0, f(a)]$ sur l'intervalle $[0, a]$.

1° n étant un entier strictement positif, soit $(x_i)_{i = 0, 1, \ldots, n}$, une suite strictement croissante de nombres réels telle que :

$$x_0 = 0\,, \qquad x_n = a$$

On pose $y_i = f(x_i)$, pour $i = 0,1, \ldots, n$. Calculer la somme :

$$\sum_{i=1}^{i=n} [(x_i - x_{i-1}) f(x_{i-1}) + (y_i - y_{i-1}) g(y_i)].$$

En déduire l'égalité :

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^{f(a)} g(x)\,dx = af(a). \tag{1}$$

2° On suppose que f possède une dérivée f' continue sur $[0, a]$. Démontrer que :

$$\int_0^a xf'(x)\,dx = \int_0^{f(a)} g(x)\,dx.$$

Retrouver la formule (1).

3° Si $\alpha \in [0, a]$, et $\beta \in [0, f(a)]$, démontrer l'inégalité :

$$\alpha\beta \leqslant \int_0^\alpha f(x)\,dx + \int_0^\beta g(x)\,dx. \tag{2}$$

Pour cela, on pourra comparer les expressions :

$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(x)\,dx \quad \text{et} \quad \alpha[\beta - f(\alpha)].$$

. . ./. . .

4° Utiliser les variations de la fonction

$h(t) = \alpha t - \int_0^t g(x)\,dx$ dans l'intervalle $[0, f(a)]$ pour retrouver (2).

5° A tout nombre réel $p > 1$, on associe le nombre réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Prenant pour f la fonction $x \to x^{p-1}$, montrer que

$$\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}, \tag{3}$$

pour tout couple de nombres réels positifs α et β.

6° c et d sont deux nombres réels tels que $c < d$, φ et ψ sont deux applications continues de $[c, d]$ dans $\mathbb{R}$, p et q sont deux entiers choisis comme dans la question précédente. On pose :

$$N_p(\varphi) = \left(\int_c^d |\varphi(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \quad N_q(\psi) = \left(\int_c^d |\psi(x)|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Montrer que

$$\int_c^d |\varphi(x).\psi(x)|\,dx \leqslant N_p(\varphi).N_q(\psi).$$

II

Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit E un espace vectoriel, de dimension n, sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes; on désigne par Θ le vecteur nul de E.

Soit u un endomorphisme de E; pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on définit par récurrence, l'endomorphisme $u^i = u \circ u^{i-1} = u^{i-1} \circ u$, en désignant par u^0 l'application identique. On note :

$E_i = \ker u^i$, le noyau de u^i (on peut écrire $E_0 = \{\Theta\}$);

Im u^i, l'image de u^i ;

et, pour tout sous-espace vectoriel G de E, dim G sa dimension.

Dans tout le problème, u est un endomorphisme de E, possédant la propriété : il existe un entier p, supérieur ou égal à 1, tel que u^p est l'application nulle.

1° *a.* Montrer que l'on a $E_p = E$, $E_1 \neq \{\Theta\}$, et $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_p$.

b. Montrer que, si, pour un entier j tel que $2 \leqslant j < p$, on a $E_{j-1} = E_j$, alors, $E_{j-1} = E_j = E_{j+k} = E$, pour tout entier $k \geqslant 0$.

En déduire que dim $E_m \geqslant m$, pour tout entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$.

c. Soit l un entier tel que $1 \leqslant l \leqslant p - 1$ et soit F_l un sous-espace vectoriel supplémentaire de E_l dans E_{l+1}. Montrer que :

$$u(F_l) \subset E_l$$

$$\text{et } u(F_l) \cap E_{l-1} = \{\Theta\}.$$

Montrer que la restriction de u à F_l est injective.

d. Déduire de ce qui précède que, si dim $E_1 = 1$, on a dim $E_m = m$, pour tout entier m tel que $1 \leqslant m \leqslant n$.

2° On suppose que $n = 3$ et que dim $E_1 = 1$.

Soit e_1 un vecteur directeur de E_1.

a. Montrer que (Im u) $\cap E_1 = E_1$

et qu'il existe un vecteur $e_2 \in E_2$ tel que $u(e_2) = e_1$.

b. Montrer qu'il existe un vecteur e_3 tel que (e_1, e_2, e_3) forment une base de E et que $u(e_3) = e_2$.

c. Écrire la matrice de u par rapport à la base (e_1, e_2, e_3).

d. Soit v l'endomorphisme de E dont la matrice par rapport à une base (f_1, f_2, f_3) s'écrit :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Existe-t-il une matrice diagonale semblable à B?

e. On pose $w = v - u^0$; écrire les matrices de w^2 et w^3 dans la base (f_1, f_2, f_3).

Trouver une base de E telle que la matrice de v par rapport à cette base s'écrive :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail